Tzitzeica方程式と戸田分子方程式の境界値問題 (可積分系理論とその周辺 : 課題と展望を探る)

AUTHOR(S):

広田, 良吾; 高橋, 大輔

CITATION:

広田, 良吾 ...[et al]. Tzitzeica方程式と戸田分子方程式の境界値問題 (可積分系理論とその周辺 : 課題と展望を探る). 数理解析研究所講究録 2004, 1400: 145-156

ISSUE DATE:

2004-11

URL:

http://hdl.handle.net/2433/26044

数理解析研究所講究録 1400 巻 2004 年 145-156

Tzitzeica 方程式と戸田分子方程式の境界値問題

早稲田大学　広田　良吾、高橋大輔

Ryogo Hirota, Daisuke Takahashi

School of Science and Engineering,Waseda University

July 31,2003

Abstract

Schief による Discrete Tzitzeica equation の 3 次形式は双線形二次元戸田分子差分方程式に特別な境界条件を付したものである. この発見を契機に, 二次元戸田差分方程式の境界値問題を調べ, 3 次形式の戸田差分方程式では可積分性と両立する 5 種類の境界条件を求めた. 可積分性は Algebraic entropy の数値的計算結果により判定した. また Discrete Tzitzeica equation は超離散化可能であることを示した.

1　始めに

Tzitzeica 方程式 (1910 年)

$$(\log h)_{xy} = h - h^{-2}$$

は, ソリトン研究が加速的に発展にした 1970 年代に Mikhailov 方程式とか Dodd-Bullough 方程式と呼ばれていたものである. しかしこの方程式は微分幾何学 (*affine sphere*) における "*Gauss equation*" の両立条件として すでに Tzitzeica によって求められていたものである.

Schief[1] は 差分幾何学 (*discrete affine sphere*) における "*discret Gauss equation*",

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_{11}-\mathbf{r}_1 &= \alpha(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})+\beta(\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}_1),\\
\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r} &= H(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2),\\
\mathbf{r}_{22}-\mathbf{r}_2 &= \gamma(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})+\delta(\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}_2),
\end{aligned}
$$

の両立条件として discrete Tzitzeica 方程式

$$
H_{12} = \frac{H(H-1)}{H^2(H_1+H_2-H_1H_2)-H+ABH_1H_2},
$$
$$
A_2 = \frac{H_1}{H}A, \quad B_1 = \frac{H_2}{H}B,
$$

を導いた. ここで, 下付きの添え字 1,2 はそれぞれ 離散的座標 m,n のシフトを表している. 即ち

$$
\begin{aligned}
&H_1 = H(m+1,n), \quad H_2 = H(m,n+1),\\
&H_{11} = H(m+2,n),\\
&H_{12} = H(m+1,n+1), \quad H_{22} = H(m,n+2).
\end{aligned}
$$

である. 差分方程式は変数変換,

$$
H = \frac{\tau_1\tau_2}{\tau\tau_{12}}, \quad A = c\frac{\tau_1^2}{\tau\tau_{11}}, \quad B = \hat{c}\frac{\tau_2^2}{\tau\tau_{22}},
$$

によって 3 次形式

$$
\begin{vmatrix}
\tau(m,n) & \tau(m,n+1) & \tau(m,n+2)\\
\tau(m+1,n) & \tau(m+1,n+1) & \tau(m+1,n+2)\\
\tau(m+2,n) & \tau(m+2,n+1) & \tau(m+2,n+2)
\end{vmatrix}
= q_0\, \tau(m+1,n+1)^3. \qquad q_0 : const.
$$

に変換される [1].
この 3 次形式は何者か？ というのが本研究の動機である.

2 二次元 戸田分子方程式

戸田分子方程式 (Toda molecule equation)[2] は Aperiodic Toda lattice equation とも呼ばれている. 戸田格子方程式と戸田分子方程式では方程式は同じだが境界条件が違う.

戸田分子方程式は戸田方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}$$

に境界条件

$$V_0 = 0 \quad \text{and} \quad V_{N+1} = 0.$$

を付加したものである. 戸田分子方程式は変数変換

$$V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log \tau_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} \tag{1}$$

によって双線形形式

$$D_x D_y \tau_n \cdot \tau_n = 2\tau_{n+1}\tau_{n-1}, \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots, N$$

に変換される. 通常の戸田分子方程式の境界条件は

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_{N+1} = f_1(x) g_1(y),$$

である. ここで $f_1(x), g_1(y)$ はそれぞれ x, y の任意関数である. このように τ_{N+1} を選ぶと V_{N+1} にたいする境界条件

$$V_{N+1} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log \tau_{N+1} = 0$$

が満たされる.

$N = 2$ のとき, 特別な境界条件 $V_3 = 3V_1$ をもつ戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log V_1 = V_2 - 2V_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\log V_2 = 4V_1 - 2V_2 \tag{3}$$

を考える.
式 (2) の 2 倍を式 (3) に加えると

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log(V_1^2 V_2) = 0, \tag{4}$$

となるが, この式を 2 回積分して関係式

$$V_2 = V_1^{-2} f_2(x) g_2(y) \tag{5}$$

を得る. ここで $f_2(x), g_2(y)$ はそれぞれ x, y の任意関数である. この関係式を式 (2) に代入すると式 (2) は

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_1 = V_1^{-2} f_2(x) g_2(y) - 2V_1 \tag{6}$$

となる. ここで変数を

$$V_1 = (f_2(x) g_2(y)/2)^{1/3} h \tag{7}$$

と変換すると式 (6) は次式となる.

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log h = (h^{-2} - h)(4 f_2(x) g_2(y))^{1/3}$$

この式は座標を変換すると Tzitzeica equation

$$\frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} \log h = h - h^{-2} \tag{8}$$

である.
したがって Tzitzeica equation は戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_1 = V_2 - 2V_1,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_2 = V_3 - 2V_2 + V_1$$

に境界条件 $V_3 = 3V_1$ を課したものに等しい.

従属変数変換式 (1) を使うと境界条件 $V_3 = 3V_1$ は τ-関数に対する境界条件

$$\tau_3 = f_3(x)g_3(y)\tau_1^3 \tag{9}$$

に変換される.
したがって Tzitzeica equation は次のような双線形形式に変換された.

$$D_xD_y\tau_1 \cdot \tau_1 = 2\tau_2, \tag{10}$$
$$D_xD_y\tau_2 \cdot \tau_2 = 2\tau_3\tau_1 \tag{11}$$

ただし境界条件は

$$\tau_3 = f_3(x)g_3(y)\tau_1^3$$

となる.
式(10)より

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_{1,x} \\ \tau_{1,y} & \tau_{1,xy} \end{vmatrix}$$

である. この式を上式(11)の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} & D_xD_y\tau_2 \cdot \tau_2/2 \\ & \equiv \tau_{2,xy}\tau_2 - \tau_{2,x}\tau_{2,y} \\ & = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_{1,xx} \\ \tau_{1,yy} & \tau_{1,xxyy} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_{1,x} \\ \tau_{1,y} & \tau_{1,xy} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_{1,xx} \\ \tau_{1,y} & \tau_{1,xxy} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_{1,x} \\ \tau_{1,yy} & \tau_{1,xyy} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となるので, ヤコビの恒等式によって

$$\tau_3 = \begin{vmatrix} \tau_1 & (\tau_1)_y & (\tau_1)_{yy} \\ (\tau_1)_x & (\tau_1)_{xy} & (\tau_1)_{xyy} \\ (\tau_1)_{xx} & (\tau_1)_{xxy} & (\tau_1)_{xxyy} \end{vmatrix} \tag{12}$$

を得る. したがって τ_2, τ_3 を消去した Tzitzeica equation は 3 次形式

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & (\tau_1)_y & (\tau_1)_{yy} \\ (\tau_1)_x & (\tau_1)_{xy} & (\tau_1)_{xyy} \\ (\tau_1)_{xx} & (\tau_1)_{xxy} & (\tau_1)_{xxyy} \end{vmatrix} = q_0\tau_1^3. \tag{13}$$

となる. ここで $q_0 = f_3(x)g_3(y)$ は積分定数である. Schief は離散的 3 次形式 (1) よりこの形式 (13) の Tzitzeica equation を求めている.
以上の結果から類推して, 離散的 Tzitzeica 方程式に対する Schief の 3 次形式 (1)

$$\begin{vmatrix} \tau(m,n) & \tau(m,n+1) & \tau(m,n+2) \\ \tau(m+1,n) & \tau(m+1,n+1) & \tau(m+1,n+2) \\ \tau(m+2,n) & \tau(m+2,n+1) & \tau(m+2,n+2) \end{vmatrix}$$
$$= q_0\,\tau(m+1,n+1)^3. \qquad q_0 : const.$$

は新しい従属変数 $\tau_2(m,n)$ を導入すると次式のように書ける.

$$\tau(m+1,n+1)\tau(m,n) - \tau(m+1,n)\tau(m,n+1) = \tau_2(m,n),$$
$$\tau_2(m+1,n+1)\tau_2(m,n) - \tau_2(m+1,n)\tau_2(m,n+1)$$
$$= \tau(m+1,n+1)\tau_3(m,n).$$

ただし, 境界条件は

$$\tau_3(m,n) = q_0\,\tau(m+1,n+1)^3 \tag{14}$$

である.
即ち離散的 Tzitzeica 方程式は境界条件 (14) を課した離散的戸田分子方程式である.

3 戸田分子方程式の境界値問題

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1},$$
$$n = 1, 2, \ldots, N,$$

の境界値問題を考える. 今までの結果を要約する ($n = 0$ における境界値 $V_0 = 0$ は共通として)
　分子解の境界値 (i)　$V_{N+1} = 0$,　for arbitrary N.
　　新しい境界値 (ii)　$V_{N+1} = 3V_1$,　for $N = 2$
の 2 つがある. これを一般化して境界値問題

$$V_{N+1} = \sum_{s=1}^{N} c_s V_s, \quad c_s \text{は定数}$$

を設定したとき,戸田分子方程式の "Integrability"はどうなるのかを考える. 境界条件 $V_0 = 0$ のため,戸田格子方程式のようなソリトン解は存在しないので,$N-$ ソリトン解を計算して "Integrability"を推定することはできない. しかし差分方程式の "Integrability"は Algebraic entropy を数値的に計算して推定できるので,境界値問題を差分方程式で追及することができる.
Schiefの三次形式

$$\begin{vmatrix} \tau(m,n) & \tau(m,n+1) & \tau(m,n+2) \\ \tau(m+1,n) & \tau(m+1,n+1) & \tau(m+1,n+2) \\ \tau(m+2,n) & \tau(m+2,n+1) & \tau(m+2,n+2) \end{vmatrix}$$
$$= q_0\,\tau(m+1,n+1)^3. \qquad q_0 : const.$$

の右辺を $q_0\,F(m,n)$ とおいて次のように一般化する.

1. q_0 は任意の比例定数とする.
2. $F(m,n)$ は m,n について対称的である.
3. F は τ の 3 次式である.

   $$\sum c_{j_1,j_2,j_3,k_1,k_2,k_3}\tau(m+j_1,n+k_1)\tau(m+j_2,n+k_2)\tau(m+j_3,n+k_3).$$

4. F はゲージ変換

   $$\tau(m,n) \to \exp(jm+kn)\tau(m,n)$$

   によって不変である. したがって

   $$j_1+j_2+j_3=3, \quad k_1+k_2+k_3=3,$$

   である.

5. 境界値問題を考えているので,F には最高次の項 $\tau(m+2,n+2)$ を含めない.

   注　この項を含むようにすると三次形式の一般形を考えていることになる. この場合にはより多くの可積分な方程式が得られる.

これらの条件を満たす一般的な境界条件 $F(m,n)$ は
$$F(m,n) = c_1 f(m+3,n)f(m,n+3)f(m,n)$$
$$+c_2 f(m+2,n+1)f(m+1,n+2)f(m,n)$$

$$+c_3 f(m+1,n+1)^3$$
$$+c_4 f(m+2,n) f(m+1,n+1) f(m,n+2)$$
$$+c_5 f(m+1,n+1)[f(m,n+1) f(m+2,n+1) + f(m+1,n) f(m+1,n+2)]$$
$$+c_6[f(m+2,n+1) f(m+1,n) f(m,n+2)$$
$$+f(m+1,n+2) f(m,n+1) f(m+2,n)].$$

となる.
$F(m,n)$ の係数 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ を $-1,0,1$ の範囲で動かし,Hietarinta and Viallet (1998) の Algebraic entropy を使って数値的に可積分性を推定した結果

case 1 $\quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0,$

case 2 $\quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 1, c_5 = -1, c_6 = -1,$

case 3 $\quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = -1, c_4 = 1, c_5 = 1, c_6 = -1,$

case 4 $\quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = -1, c_5 = 0, c_6 = 1,$

case 5 $\quad c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0, c_6 = 0.$

の5つの場合が可積分と判定される.
これを $F(m,n)$ の形で表すと次式となる.

$$F_1 = -\tau(m+1,n+1)^3.$$
$$\begin{aligned}F_2 = &-\tau(m+2,n+1)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+1)\\ &-\tau(m+2,n+1)\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\\ &-\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+2)\tau(m,n+1)\\ &+\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+2)\\ &-\tau(m+1,n+2)\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)\\ &-\tau(m+1,n+1)^3.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}F_3 = &\ \tau(m+2,n+1)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+1)\\ &-\tau(m+2,n+1)\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\\ &-\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+2)\tau(m,n+1)\\ &+\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+2)\\ &+\tau(m+1,n+2)\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)\\ &-\tau(m+1,n+1)^3.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}F_4 = &\ \tau(m+2,n+1)\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\\ &+\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+2)\tau(m,n+1)\\ &-\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+2).\end{aligned}$$

$$F_5 = 0.$$

この中で

1. F_1 は Schief による Discrete Tzitzeica eq. を与える [1].
2. F_3 は Schief の Generalized discrete Tzitzeica eq. を与える [1].
3. F_5 は 元来の Discrete Toda molecule eq. を与える [2].
4. F_2 と F_4 は 新しい非線形差分方程式を与える.
5. 第5節で示すように F_3 を除けば全部 超離散化可能 である.

4 3次形式より通常形式への変換

まず次式で従属変数 $V_s(m,n)$, $s=1,2,\cdots,N$ を定める.

$$V_s(m,n) = \frac{\tau_{s+1}(m,n)\tau_{s-1}(m+1,n+1)}{\tau_s(m+1,n)\tau_s(m,n+1)}. \tag{15}$$

そうすると双線形方程式

$$\begin{aligned}&\tau_s(m+1,n+1)\tau_s(m,n) - \tau_s(m+1,n)\tau_s(m,n+1)\\ &\quad = q\tau_{s+1}(m,n)\tau_{s-1}(m+1,n+1), \quad \text{for } s=1,2,\ldots,N,\end{aligned}$$

は

$$1+qV_s(m,n) = \frac{\tau_s(m+1,n+1)\tau_s(m,n)}{\tau_s(m+1,n)\tau_s(m,n+1)}, \quad \text{for } s=1,2,\ldots,N. \tag{16}$$

と書き換えられる. 式 (15), (16) より

$$\frac{V_s(m+1,n+1)V_s(m,n)}{V_s(m+1,n)V_s(m,n+1)} = \frac{[1+qV_{s+1}(m,n)][1+qV_{s-1}(m+1,n+1)]}{[1+qV_s(m+1,n)][1+qV_s(m,n+1)]}, \quad \text{for } s=1,2,\ldots,N.$$

を得る. 上式と式 (16) によって, 境界条件が τ の積で表されているとき, $\tau(m,n)$ に対する境界条件が V に対する境界条件に変換できる. たとえば次の場合である.

(i) $\tau_0(m,n) = 1 \longrightarrow V_0(m,n) = 0,$
for all equations.

(ii) $\tau_{N+1}(m,n) = f(m)g(n) \longrightarrow V_{N+1}(m,n) = 0,$
for the Toda molecule equation,

(iii) $\tau_3(m,n) = ab\,\tau_1^3(m+1,n+1) \longrightarrow$
$$1 + qV_3(m,n) = [1 + qV_1(m+1,n+1)]^3,$$
for the Tzitzeica equation.

しかし, 可積分な境界条件 F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 の中で, F_2, F_3, F_4 は τ の積の和で表されているので V に対する境界条件に書き変えられない.
この事は戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

の境界値問題を

$$V_{N+1} = \sum_{s=1}^{N} c_s V_s$$

と設定して可積分性を調べる [3][4] ことは不充分な結果を与えることを警告している. 境界値問題も τ 関数のレベルで調べる必要がある.

5 超離散化

3 次形式

$$\begin{vmatrix} \tau(m,n) & \tau(m,n+1) & \tau(m,n+2) \\ \tau(m+1,n) & \tau(m+1,n+1) & \tau(m+1,n+2) \\ \tau(m+2,n) & \tau(m+2,n+1) & \tau(m+2,n+2) \end{vmatrix} = q_0\, F(m,n).$$

の超離散化を行う. Jacobi の等式を使うと, この式は (q_0 は任意パラメタ)

$$\tau(m+1,n+1)\tau(m,n) - \tau(m+1,n)\tau(m,n+1) = \tau_2(m,n),$$
$$\tau_2(m+1,n+1)\tau_2(m,n) - \tau_2(m+1,n)\tau_2(m,n+1) = \tau(m+1,n+1)\tau_3(m,n),$$

境界条件： $\tau_3(m,n) = q_0\, F(m,n)$,

と書き換えられる. $F(m,n)$ の一部を $\tau_2(m,n)$ を使って書き直し,q_0 の符号は任意であることを考慮すると

$$
\begin{aligned}
&F_1 = \tau(m+1,n+1)^3.\\
&F_2 = \{\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)^2\tau(m,n+1)^2\\
&\quad +\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\tau(m,n+1)\\
&\quad +\tau(m+2,n)\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)\tau_2(m,n+1)q\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)^3\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)^2\tau(m+1,n)^2\tau(m,n+2)\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)^2\tau_2(m,n+1)q\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+1)^2\tau_2(m+1,n)q\\
&\quad +\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\tau(m,n+1)\tau_2(m+1,n)q\}\\
&\quad /(\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)).\\
&F_3 = \{\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)^2\tau(m,n+1)^2\\
&\quad -\tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\tau(m,n+1)\\
&\quad -\tau(m+2,n)\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)\tau_2(m,n+1)q\\
&\quad -\tau(m+1,n+1)^3\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)^2\tau(m+1,n)^2\tau(m,n+2)\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)\tau(m+1,n)^2\tau_2(m,n+1)q\\
&\quad +\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+1)^2\tau_2(m+1,n)q\\
&\quad -\tau(m+1,n)\tau(m,n+2)\tau(m,n+1)\tau_2(m+1,n)q\}\\
&\quad /(\tau(m+1,n)\tau(m,n+1)).\\
&F_4 = \tau(m+2,n)\tau(m+1,n+1)\tau(m,n+2)\\
&\quad +\tau(m+2,n)\tau_2(m,n+1)q + \tau(m,n+2)\tau_2(m+1,n)q
\end{aligned}
$$

となる.
F_3 を除いてすべて positive terms の和である. したがって F_3 以外の境界条件を付加した方程式は超離散化可能である.

このことは Tziteica equation 方程式と同じように幾何学的な意味がある離散的 Sine-Gordon 方程式の超離散化が非常に困難であることと比較さるべきである.

6 まとめ

1. Tziteica equation は 特殊な境界条件がついた 戸田分子方程式 (N=2) である.
2. 戸田分子方程式の可積分な境界条件のすべてを調べるためには τ 関数の方程式で考えないと不十分である.
3. 離散的 Tziteica equation は超離散化可能である.

References

[1] W. K. Schief, " An Introduction to Integrable Difference and Differential Geometries: Affine Spheres, Their Natural Generalization and Discretization", CRM Proceedings and Lecture Notes Volume 29, 2001. pp 137-148.

[2] Ryogo Hirota," Discrete Two-Dimensional Toda Molecule Equation",Phys. Soc.Jpn.**56**(1987),pp.4285-4288.

[3] I.T.Habibullin," Symmetry Approach in Boundary Value Problems", Nonlinear Mathematical Physics,V.3,N 1-2,(1996),147-151.

[4] Gustav W Delius,"Soliton-preserving boundary condition in affine Toda field theories",arXiv:hep-th/9809140v2 20 Sep 1998.